EX 28 :

I)

1) $x\in[1,+\infty[$

$g(x)=xLnx-x+1$

a) $g'(x)=Lnx\geq 0 \quad \forall x\in[1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
g'(x)	0	+
g(x)	0 ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x.[Lnx-1]+1=+\infty$

b) $g(x)\geq 0\,;\forall x\in[1,+\infty[$

2)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{Lnx} & si\ x>1\\ 1 & si\ x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\left\{\frac{Lnx}{x-1}\right\}1}=1=f(1)$$

D'où f est continue à droite en 1

3)

a)

$$*(t-1)-\left(1-\frac{1}{t}\right)=\frac{t^2-2t+1}{t}=\frac{(t-1)^2}{t}\geq 0$$

d'où $\boxed{1-\frac{1}{t}\leq t-1}(1)\,;\ \forall t\in[1,+\infty[$

$$*\left(1-\frac{1}{t}\right)-\left[t-1-(t-1)^2\right]=\frac{(t-1)^3}{t}\geq 0$$

D'où

$$\boxed{t-1-(t-1)^2\leq t-\frac{1}{t}}(2)$$

$(1)+(2)\Rightarrow$

$$t-1-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq t-1$$

$\forall t\in[1,+\infty[$

b) $x\geq 1$

pour $t\in[1,x]$ on a :

$$(t-1)-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq(t-1)$$

$$\Rightarrow\int_1^x\left((t-1)-(t-1)^2\right)dt\leq\int_1^x\left(1-\frac{1}{t}\right)dt\leq\int_1^x(t-1)\,dt$$

$$\Rightarrow\left[\frac{(t-1)^2}{2}-\frac{(t-1)^3}{3}\right]_1^x\leq\left[t-Lnt\right]_1^x\leq\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x$$

$$\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}\leq x-1-Lnx\leq\frac{(x-1)^2}{2}$$

c) pour $x>1$

$$\frac{1}{2}-\frac{x-1}{3}\leq\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\leq\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2}-\frac{(x-1)}{3}=\frac{1}{2}$$

D'où

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\right)=\frac{1}{2}$$

d) pour $x>1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}=\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\right).f(x)$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}*1=\frac{1}{2}$$

d'où f est dérivable à droite en 1 et

$$f'_d(1)=\frac{1}{2}$$

4)

a) pour $x>1$

$$f'(x)=\frac{Lnx-\frac{1}{x}(x-1)}{(Lnx)^2}$$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(Lnx)^2}\geq 0$$

x	1	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	1 ↗	$+\infty$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn